Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

Carnet: ____________________

Nombre: ____________________

Sección: ____________________

MA-1112 —Tercer Parcial, Martes 8-04-2008. (40 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo D

1. (10 ptos.)

   a) (5 ptos.) Halle la integral

$$\int x \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$$

Solucion: Sea $I = \int x \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$. Utilizando el metodo de Integración por partes y tomando $u = x$ y $dv = \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$. Tenemos que $du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}$.
Asi, $I = \frac{x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}dx$.
Por otro lado, sea

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \tfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1-\cos(2x)}{2}dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(x - \tfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Luego,

$$I = \frac{x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - I_1 = \frac{x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} + C.$$

   b) (5 ptos.) Demuestre que

$$\int (\ln(x))^m\, dx = x(\ln(x))^m - m\int (\ln(x))^{m-1}\, dx.$$

Solucion: Utilizando el metodo de Integración por partes, se tiene que si consideramos como $u = (\ln(x))^m$ y $dv = dx$, implica que $du = m\frac{(\ln(x))^{m-1}}{x}dx$ y $v = x$. Entonces, $\int (\ln(x))^m\, dx = x(\ln(x))^m - m\int (\ln(x))^{m-1}\, dx$.

2. (10 ptos.) Halle la siguiente integral

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} - e^{2x}}dx$$

Solucion: Realizando el cambio de variable: $u = e^x$, $du = e^x dx$; tenemos que

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} - e^{2x}}dx = \int \frac{du}{u^3 - u^2} = \int \frac{du}{u^2(u-1)}$$

.

Buscamos los valores de A, B y C

$$\frac{1}{u^2(u-1)} = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + \frac{C}{u-1}$$

de donde

$$1 = A(u-1) + Bu(u-1) + Cu^2$$

y se obtiene

$$A = -1 \qquad B = -1 \text{ y } C = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{du}{u^2(u-1)} &= -\int \tfrac{du}{u^2} - \int \tfrac{du}{u} + \int \tfrac{du}{u-1} \\
&= \tfrac{1}{u} - \ln|u| + \ln|u-1| + K \\
&= e^{-x} - x + \ln|e^x - 1| + K.
\end{aligned}$$

3. (10 ptos.)

   a) (5 ptos.) Halle la integral indefinida

   $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

   b) (5 ptos.) Luego, estudie la convergencia de $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

Solucion: Hacemos la sustitucion trigonometrica $x = 2\sec(t)$, $dx = 2\sec(t)\tan(t)dt$ (Notese que, $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2(t)-4} = 2\sqrt{\sec^2(t)-1} = 2\sqrt{\tan^2(t)} = 2\tan(t)$) y la integral se transforma en

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec(t)\tan(t)dt}{4\sec(t)\tan(t)} = \int \frac{dt}{2} = \frac{t}{2} + k.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{\operatorname{arcsec}(x/2)}{2} + k.$$

Por ultimo,

$$\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{b\to 2^+} \left(\frac{\operatorname{arcsec}(x/2)}{2}\right)_b^{4/\sqrt{3}} = \lim_{b\to 2^+} \left(\frac{\operatorname{arcsec}(4/2\sqrt{3})}{2} - \frac{\operatorname{arcsec}(b/2)}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{12} - 0 = \frac{\pi}{12}.$$

4. (10 ptos.)

a) (5 ptos.) Estudie la convergencia o divergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt.$$

Solucion: Utilizando el metodo de Integración por partes, se tiene que si consideramos como $u = \ln(t)$ y $dv = \frac{dt}{t^2}$, implica que $du = \frac{1}{t}dt$ y $v = \frac{-1}{t}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \tfrac{\ln(t)}{t^2} dt &= \lim_{w\to+\infty} \int_1^{w} \tfrac{\ln(t)}{t^2} dt \\
&= \lim_{w\to+\infty} \left(\tfrac{-1}{t}\ln(t)\right)_1^w + \lim_{w\to+\infty} \int_1^w \tfrac{dt}{t^2} \\
&= \lim_{w\to+\infty} \tfrac{-1}{w}\ln(w) + \lim_{w\to+\infty} \left(\tfrac{-1}{t}\right)_1^w \\
&= \lim_{w\to+\infty} \tfrac{-1/w}{1} - \lim_{w\to+\infty} \left(\tfrac{1}{w} - 1\right) \text{ (L'H)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) (5 ptos.) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 2} \left(1 + (x-2)^2\right)^{\sec(\pi/x)} \text{ (forma } 1^{\infty}).$$

Solucion: Sea $y = (1 + (x-2)^2)^{\sec(\pi/x)}$, $\ln(y) = \sec(\pi/x)\ln\left(1 + (x-2)^2\right)$. Asi,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \ln(y) &= \lim_{x\to 2} \tfrac{\ln\left(1+(x-2)^2\right)}{\cos(\pi/x)} \text{(forma } \tfrac{0}{0}) \\
&= \lim_{x\to 2} \tfrac{\frac{2(x-2)}{1+(x-2)^2}}{\frac{\pi}{x^2}\operatorname{sen}(\pi/x)} \text{ (L'H)} \\
&= \lim_{x\to 2} \tfrac{2(x-2)x^2}{\pi(1+(x-2)^2)\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2} \left(1 + (x-2)^2\right)^{\sec(\pi/x)} = e^0 = 1.$$